

*“Fibrifolds” und ein neuer
Beweis der Klassifikation
dreidimensionaler Raumgruppen*

Daniel H. Huson



Rockville MD USA

huson@member.ams.org

Frankfurt, 20.10.1999

Copyright (c) 2008 Daniel Huson.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license can be found at <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>

Projekte

- Kombinatorische Pflasterungstheorie, mit Andreas Dress, Olaf Delgado und Ludwig Balke

Projekte

- Kombinatorische Pflasterungstheorie, mit Andreas Dress, Olaf Delgado und Ludwig Balke
- Anwendungen in der Chemie mit J. Klinowski und A.L. Mackay (Nature 400, 1999)

Projekte

- Kombinatorische Pflasterungstheorie, mit Andreas Dress, Olaf Delgado und Ludwig Balke
- Anwendungen in der Chemie mit J. Klinowski und A.L. Mackay (Nature 400, 1999)
- Kombinatorische Geometrie/Topologie mit John H. Conway

Projekte

- Kombinatorische Pflasterungstheorie, mit Andreas Dress, Olaf Delgado und Ludwig Balke
- Anwendungen in der Chemie mit J. Klinowski und A.L. Mackay (Nature 400, 1999)
- Kombinatorische Geometrie/Topologie mit John H. Conway
- Biomathematik, phylogenetische Bäume und Netzwerke, mit A. Dress und Tandy Warnow

Projekte

- Kombinatorische Pflasterungstheorie, mit Andreas Dress, Olaf Delgado und Ludwig Balke
- Anwendungen in der Chemie mit J. Klinowski und A.L. Mackay (Nature 400, 1999)
- Kombinatorische Geometrie/Topologie mit John H. Conway
- Biomathematik, phylogenetische Bäume und Netzwerke, mit A. Dress und Tandy Warnow
- Genomics, Assembly, Genentdeckung, Celera Informatics Research

Inhalt

- Kristallographische Gruppen
- Zweidimensionale Gruppen
- Orbifold Notation
- Dreidimensionale Gruppen
- Fibrifold Notation

Kristallographische Gruppen

Eine **kristallographische Gruppe** ist eine diskrete Gruppe von Isometrien eines euklidischen Raumes (oder auch eines sphärischen oder hyperbolischen Raumes) mit kompaktem Fundamentalbereich.

- Es gibt 17 kristallographische Gruppen der Ebene \mathbb{E}^2
- Es gibt 219 kristallographische Gruppen des Raumes \mathbb{E}^3

Notation für Ebenengruppen

p1

p2

p3

p4

p6

cm

cmcm

pg

pgg

pm

pmg

pmmm

p31m

p3m1

p4g

p4m

p6m

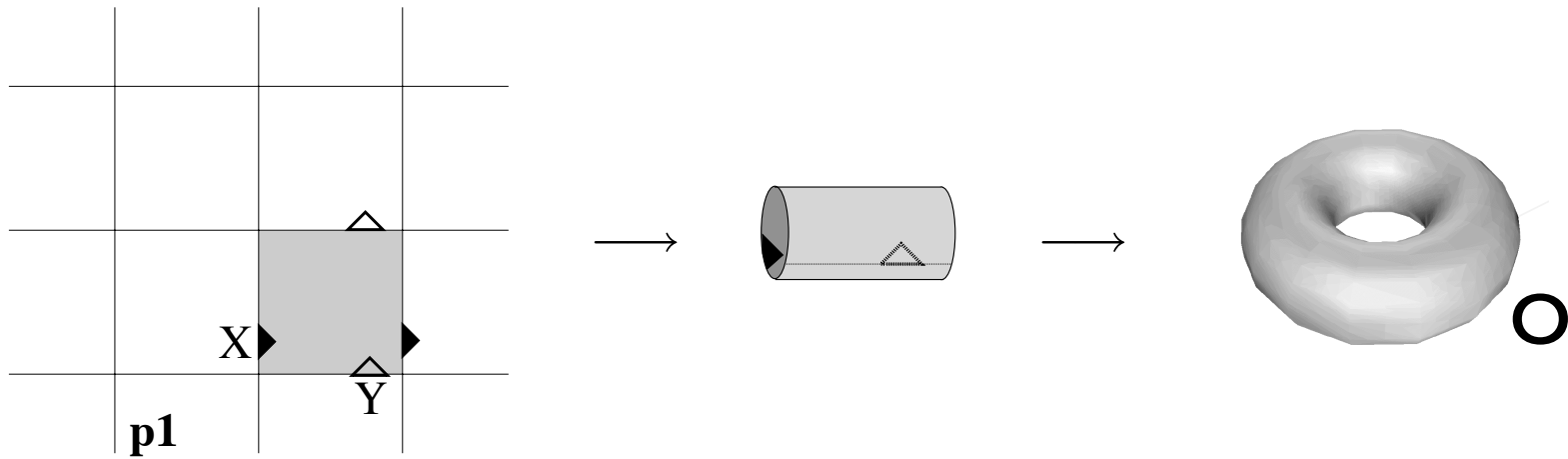
(an sichtbaren Operationen orientiert)

Mathematische Anforderungen

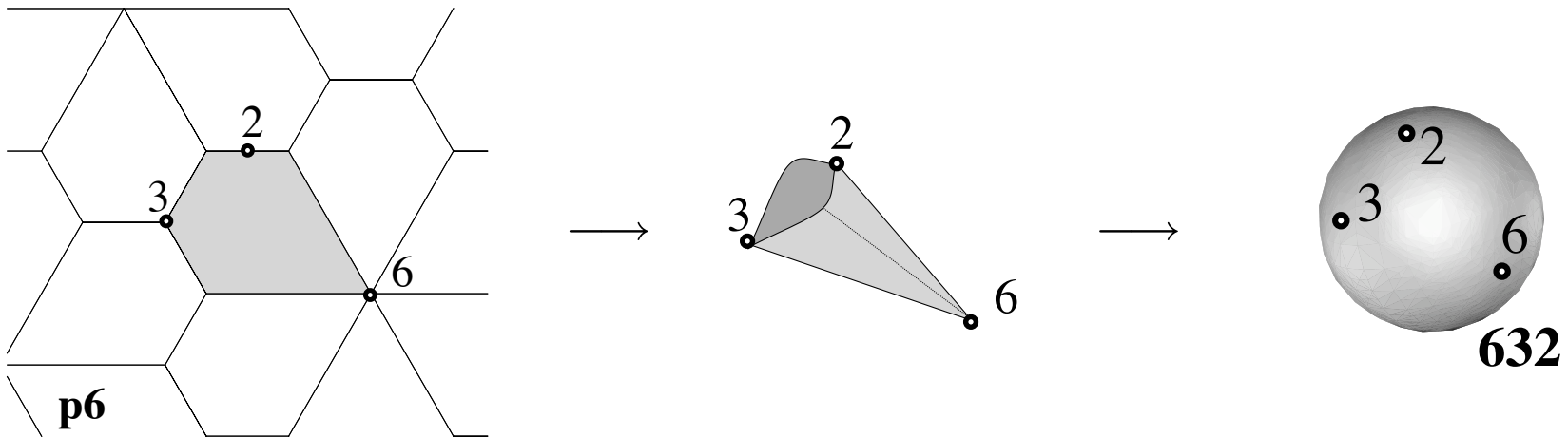
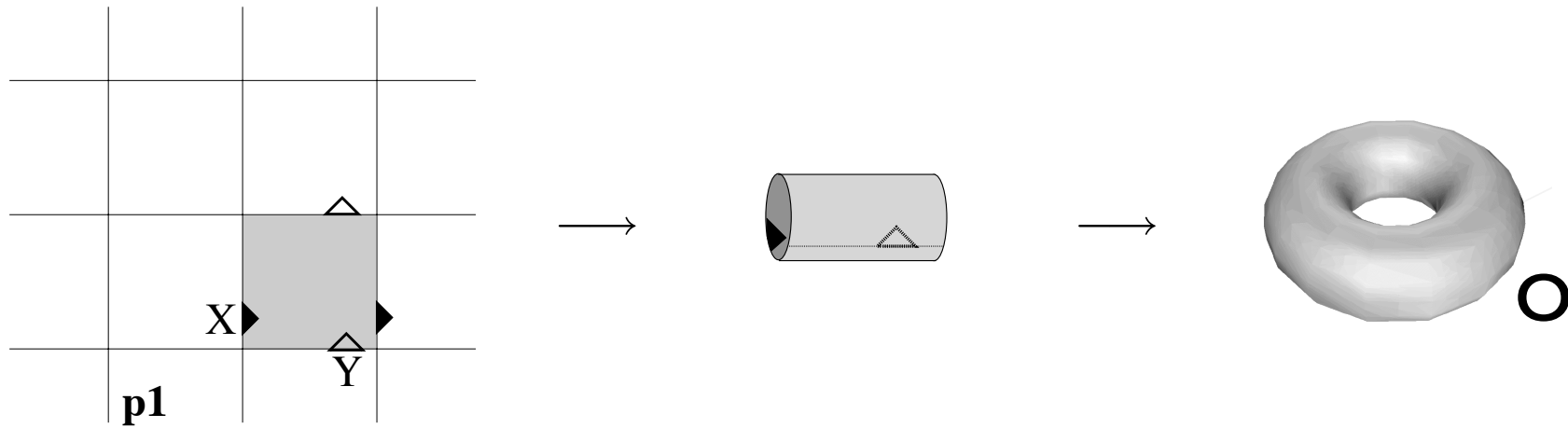
Eine Notation für zweidimensionale kristallographische Gruppen sollte:

- “selbstenthaltend” sein (kein Nachschlagen in einer Tabelle),
- für \mathbb{E}^2 , \mathbb{S}^2 und \mathbb{H}^2 gelten, und
- die Unterscheidung von Namen und “Nichtnamen” ermöglichen.

Zweidimensionale Orbifolds

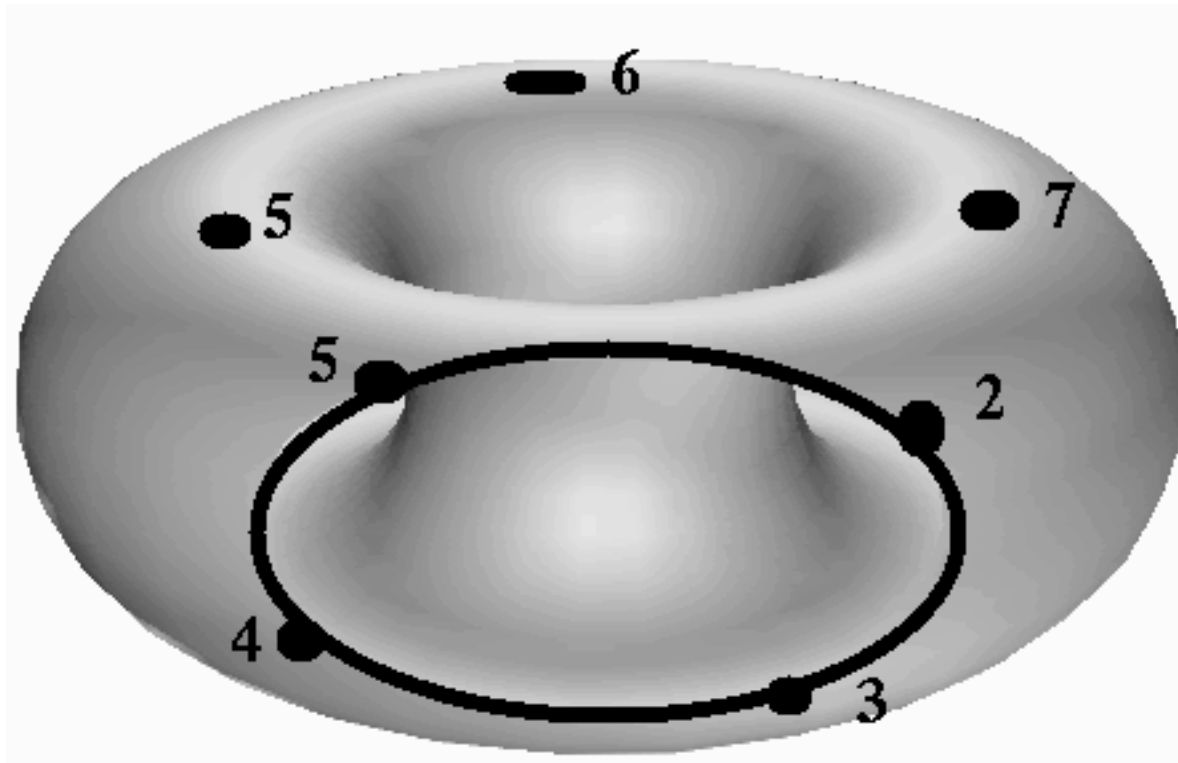


Zweidimensionale Orbifolds



Die Orbifold Notation

Ein zweidimensionales **Orbifold** $\Omega = (M, S)$ besteht aus einer kompakten Fläche M (mit oder ohne Rand) und aus einer diskreten Menge $S \subset M$ von Punkten in M , die mit **Ziffern** ≥ 2 markiert sind.



$\circ 567 * 2345$

Kristallographische vs. Orbifold Notation

$p1$	\circ	pm	$**$
$p2$	2222	pmg	$22*$
$p3$	333	pmm	$*2222$
$p4$	442	$p31m$	$3*3$
$p6$	632	$p3m1$	$*333$
cm	$*\times$	$p4g$	$4*2$
cmm	$2*22$	$p4m$	$*442$
pg	$\times\times$	$p6m$	$*632$
pgg	$22\times$		

Klassifikation der zweidimensionalen kristallographischen Gruppen

sphärisch:				euklidisch:			
*532		532		*632		632	
*432		432		*442	4*2	442	
*332	3*2	332		*333	3*3	333	
*22n	2*n	22n		*2222	2*22	22*22	2222
nn	n	n×	nn	**	*×	××	○

“Nichtnamen”:
*n nm *n *nm*

hyperbolisch:
 alle anderen

Fries:			
22∞	2∞	22∞	
∞∞∞	∞	∞×	∞∞∞

(Macbeath'67, Conway'90 u.a.)

Dreidimensionale Gruppen

Es gibt 219 Isomorphietypen kristallographischer Gruppen von \mathbb{E}^3 (Barlow, Schoenflies, Federov, unabhängig ca. 1890).

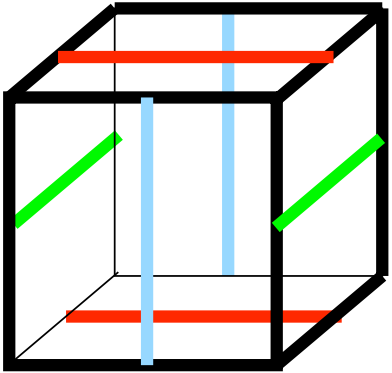
Klassischer Beweis: Klassifikation der möglichen Gitter in 14 Bravais Typen, unterschieden danach, welche Symmetrien hinzugenommen werden können, dann Hinzunahme solcher Symmetrien auf alle möglichen Weisen.

International Tables for Crystallography (Hahn 1983)

Orbifold Notation für 3D?

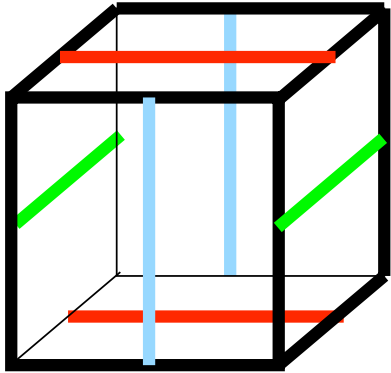
- Zweidimensionale Flächen sind einfach an Hand der Anzahl von Henkeln oder Kreuzkappen und Randkomponenten zu klassifizieren
- Ein dreidimensionales Orbifold ist oft kompliziert, es besteht aus:
 - einem dreidimensionalen Raum, und
 - einem eingebetteten, kantenmarkierten Graphen (Singularitäten Menge)

Beispiel eines einfachen Orbifolds

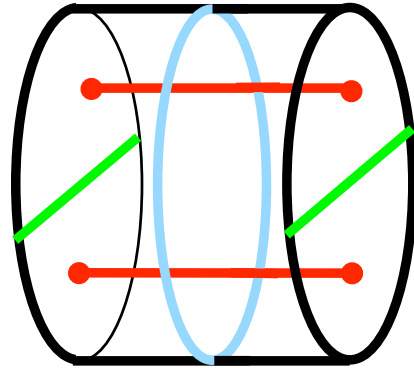


Fundamental-
bereich

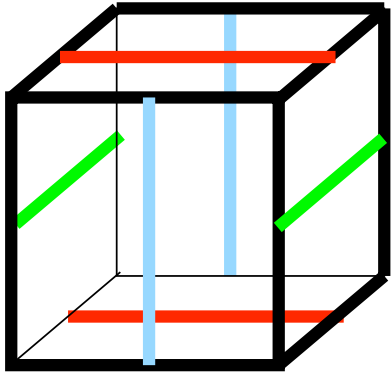
Beispiel eines einfachen Orbifolds



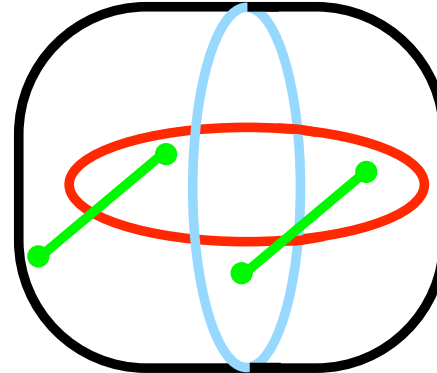
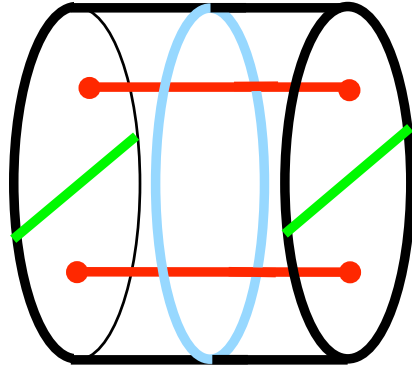
Fundamental-
bereich



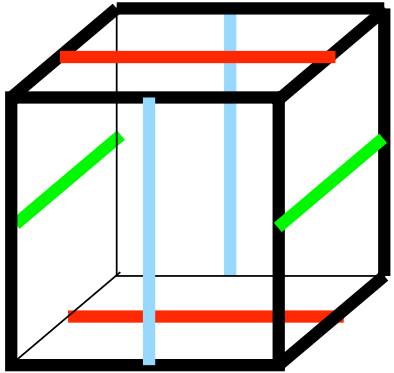
Beispiel eines einfachen Orbifolds



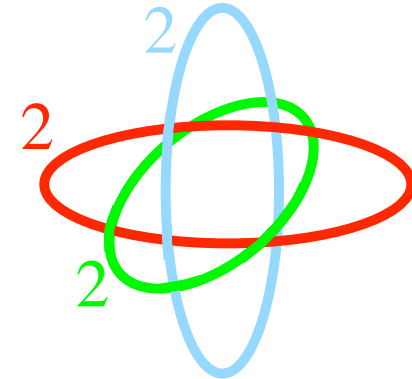
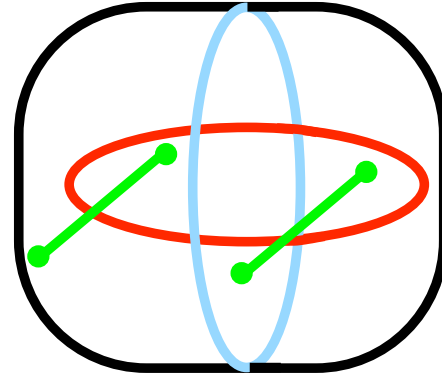
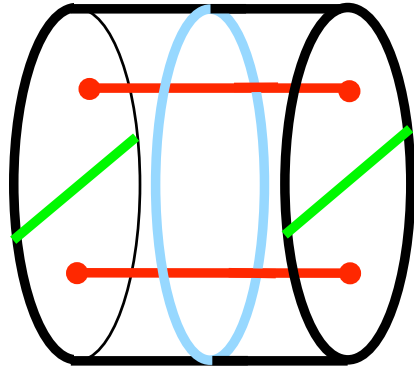
Fundamental-
bereich



Beispiel eines einfachen Orbifolds



Fundamental-
bereich



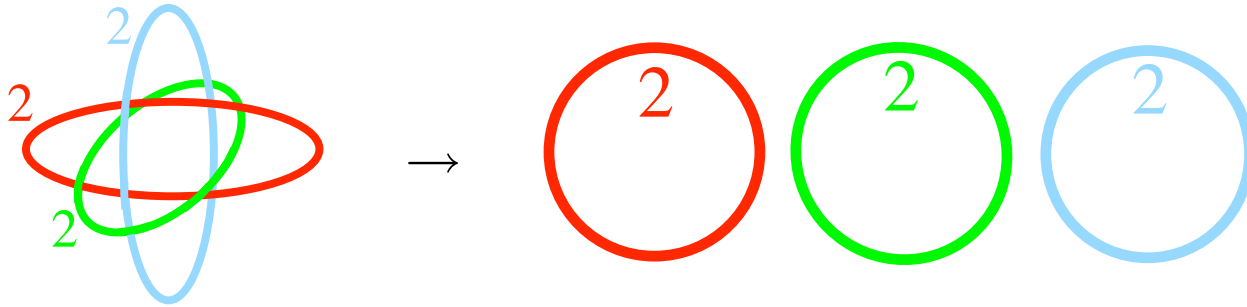
Orbifold in S^3

“Borromäischen Ringe”

Raumgruppe $24.I2_12_12_1$

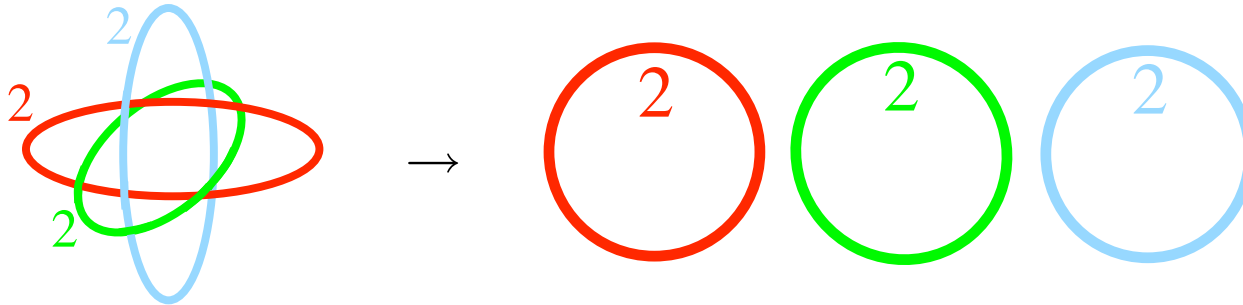
Orbifold Graphen

Idee: "Singularitätengraph" rein kombinatorisch betrachten



Orbifold Graphen

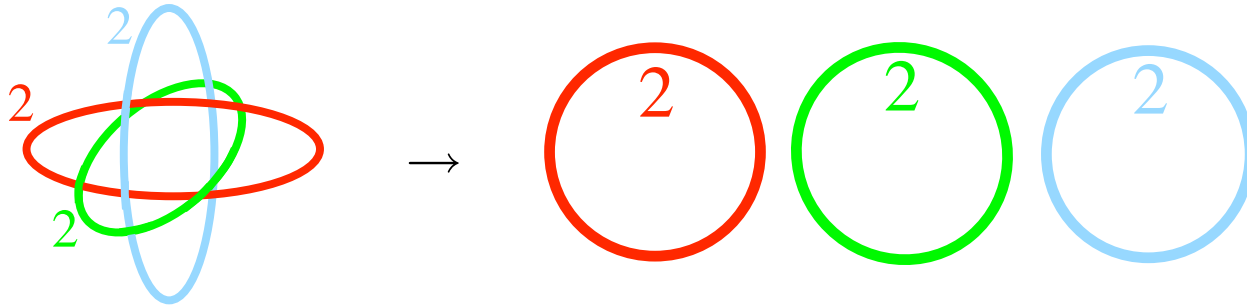
Idee: "Singularitätengraph" rein kombinatorisch betrachten



Nicht eindeutig: $24.I2_12_12_1$, $77.P4_2$ und $91.P4_122$

Orbifold Graphen

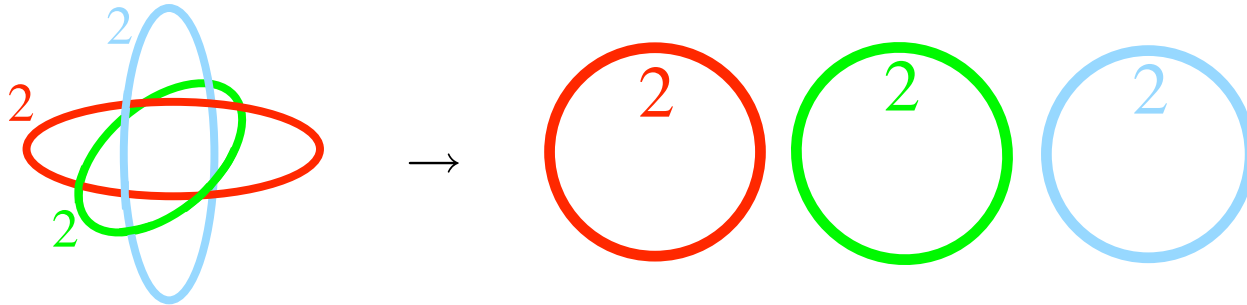
Idee: "Singularitätengraph" rein kombinatorisch betrachten



Satz: Für 174 der 219 Raumgruppen ist der Graph eindeutig.
(Eine zusätzliche Invariante ermöglicht die Unterscheidung der übrigen Gruppen)

Orbifold Graphen

Idee: "Singularitätengraph" rein kombinatorisch betrachten

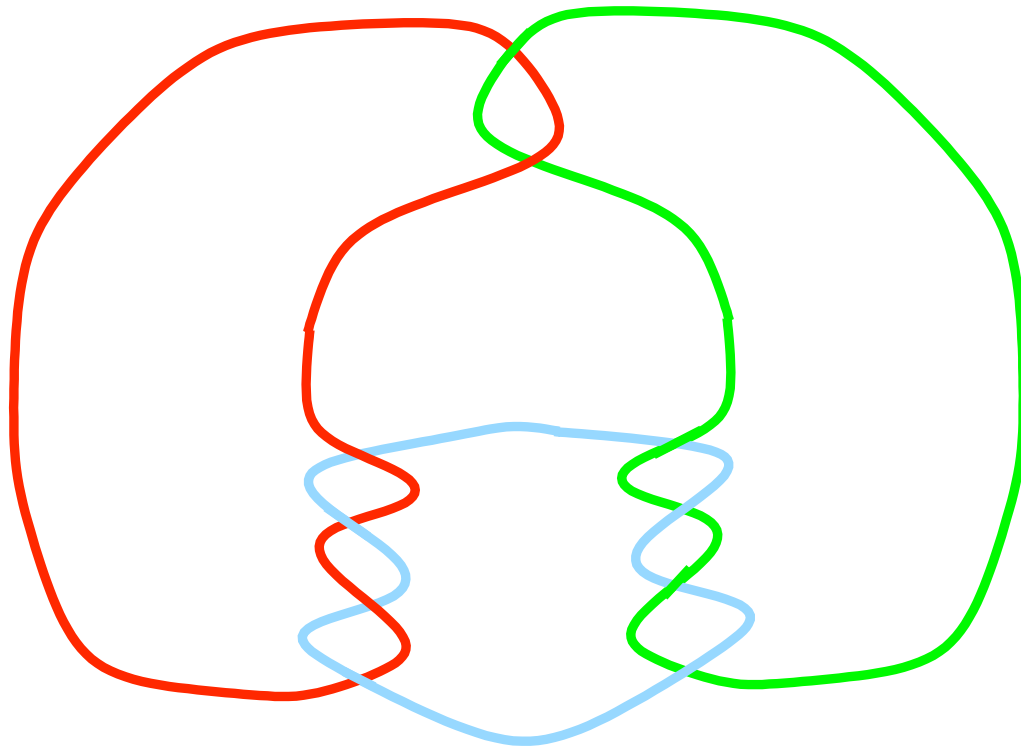


Satz: Für 174 der 219 Raumgruppen ist der Graph eindeutig.
(Eine zusätzliche Invariante ermöglicht die Unterscheidung der übrigen Gruppen)

Satz, Algorithmen, und Implementation: Delgado & H. 1997

Alternative zu den Borromäischen Ringen

91. $P4_122$



(Dunbar 1988)

Gefaserte Orbifolds

Idee: Klassifikation der Raumgruppen auf die Klassifikation der Ebenengruppen zurückführen

- **Faserung:** Zerlegung des Raumes in ein System paralleler Linien
- **Gefaserte Raumgruppe:** Raumgruppe mit einer invarianten Faserung
- **Gefasertes Orbifold:** Quotient des gefaserten Raumes nach einer gefaserten Gruppe
- **Reduzierbare Raumgruppe:** Besitzt eine Faserung (184 der 219)

(Conway und Thurston, "Orbifold Voodoo" ca. 1990)

Horizontale and vertikale Operationen

Sei G eine Raumgruppe, die in z -Richtung über H gefasert ist

Jedes Element $g \in G$ hat die Form:

$$g : (x, y, z) \rightarrow (\underbrace{a(x, y), b(x, y)}_{\substack{\uparrow \\ \text{horizontale} \\ \text{Operation}}}, \underbrace{c \pm z}_{\substack{\uparrow \\ \text{vertikale} \\ \text{Operation}}})$$

Für vertikale Operationen schreiben wir:

$$c+ \text{ für: } z \rightarrow c + z$$

Translation um c

$$c- \text{ für: } z \rightarrow c - z$$

Spiegelung in der Ebene der Höhe $\frac{c}{2}$

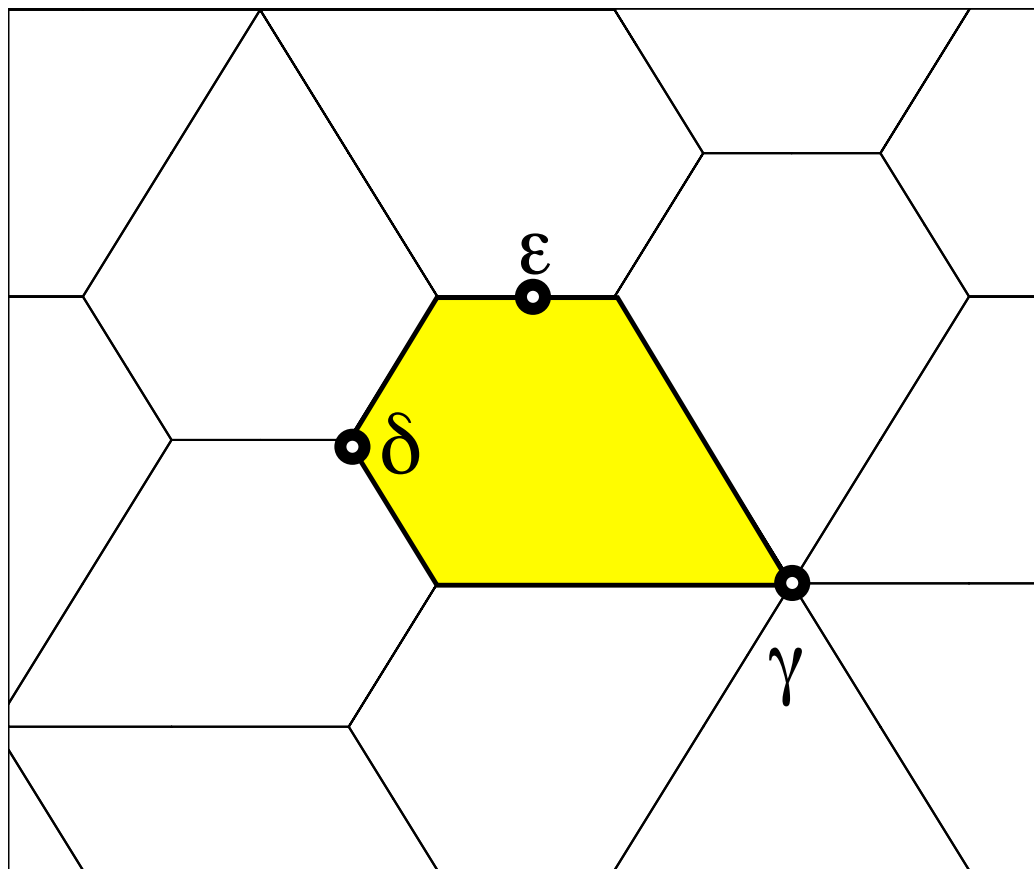
Spezifizierung einer gefaserten Gruppe G

- Wähle eine Ebenengruppe $H = \langle P, Q, R \dots \mid \dots \rangle$
- Ordne jedem Erzeugenden $P, Q, R \dots$ eine vertikale Operation $p_{\pm}, q_{\pm}, r_{\pm} \dots$ zu, mit $0 \leq p, q, r, \dots < 1$.
- Womit wird $1 \in H$ gekoppelt? Mit dem “Kern”

$$K = \begin{cases} \{n_{+} \mid n \in \mathbb{N}\} & \text{(Kreis-Faser Fall)} & \text{oder} \\ \{n_{\pm} \mid n \in \mathbb{N}\} & \text{(Interval-Faser Fall)}. \end{cases}$$

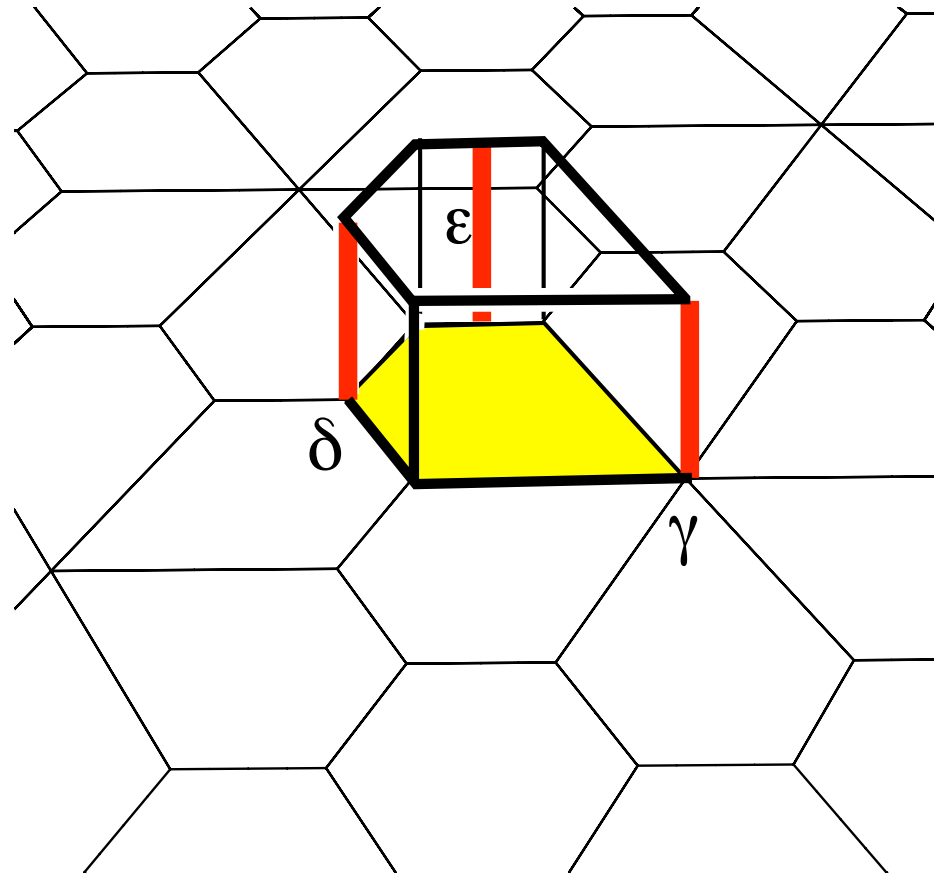
- Die Zuordnung muss ein Homomorphismus (modulo K) sein.

Beispiel: 632



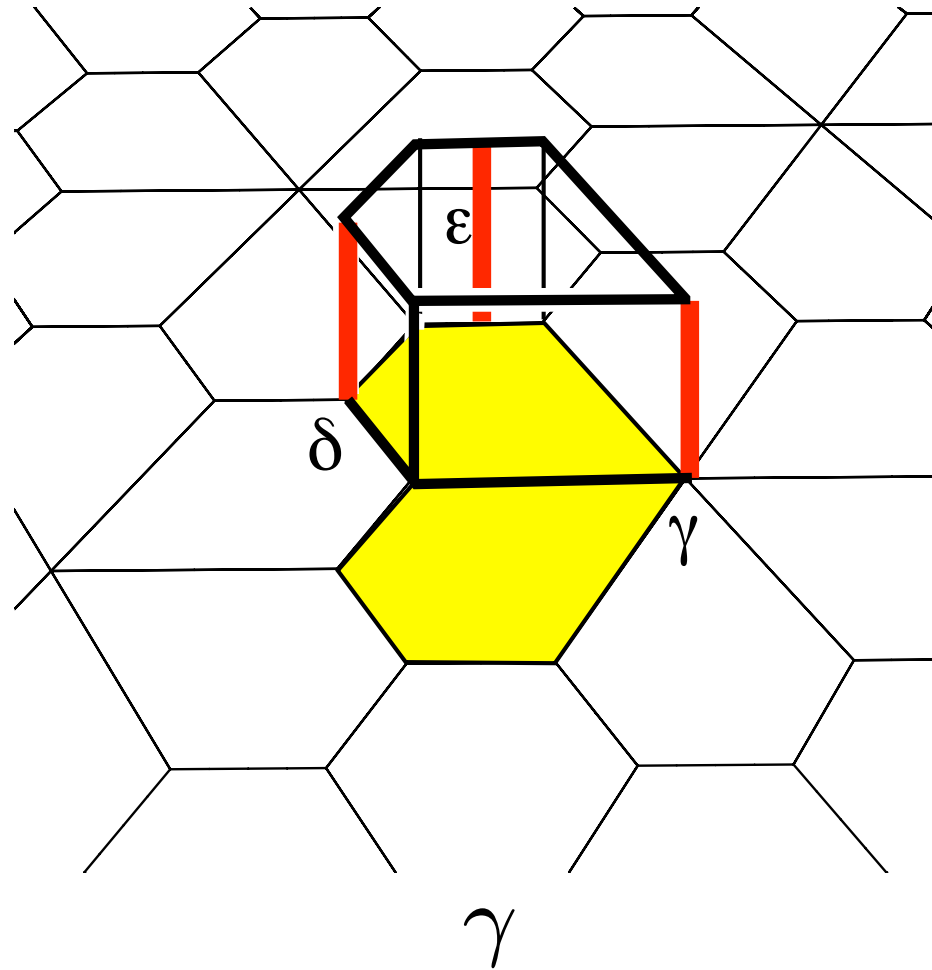
$$\gamma 6 \delta 3 \epsilon 2 \quad : \quad 1 = \gamma^6 = \delta^3 = \epsilon^2 = \gamma \delta \epsilon$$

Beispiel: 632

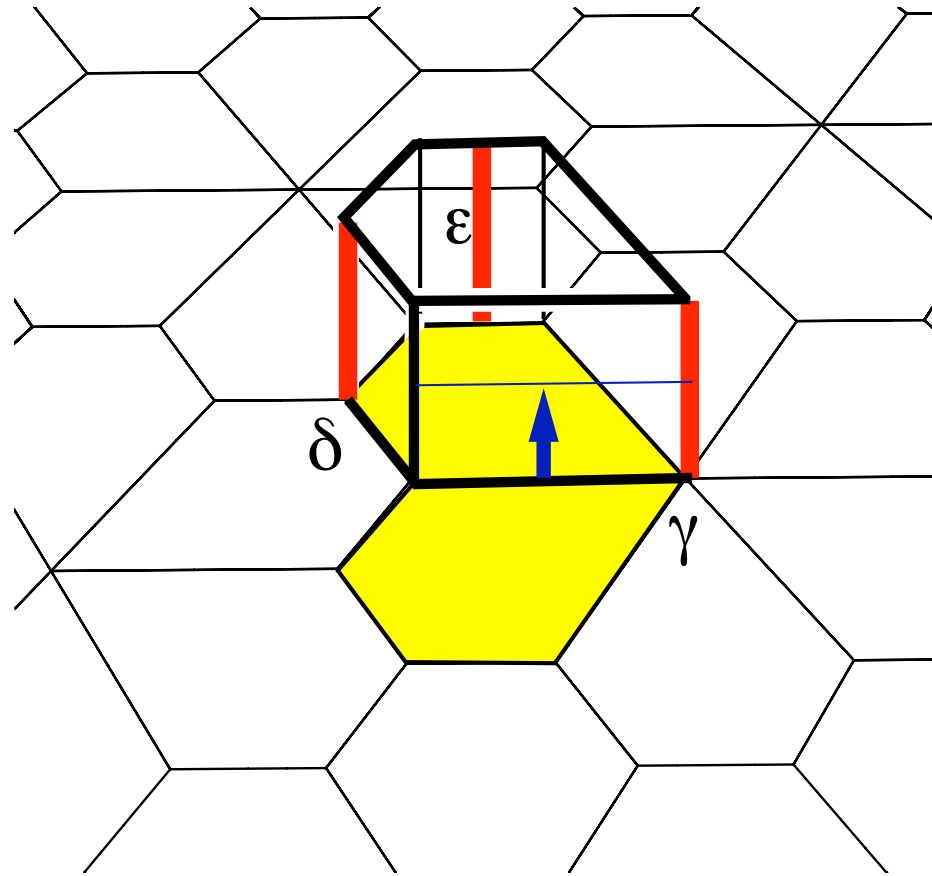


$$\gamma 6 \delta^3 \epsilon^2 : 1 = \gamma^6 = \delta^3 = \epsilon^2 = \gamma \delta \epsilon$$

Beispiel: 632

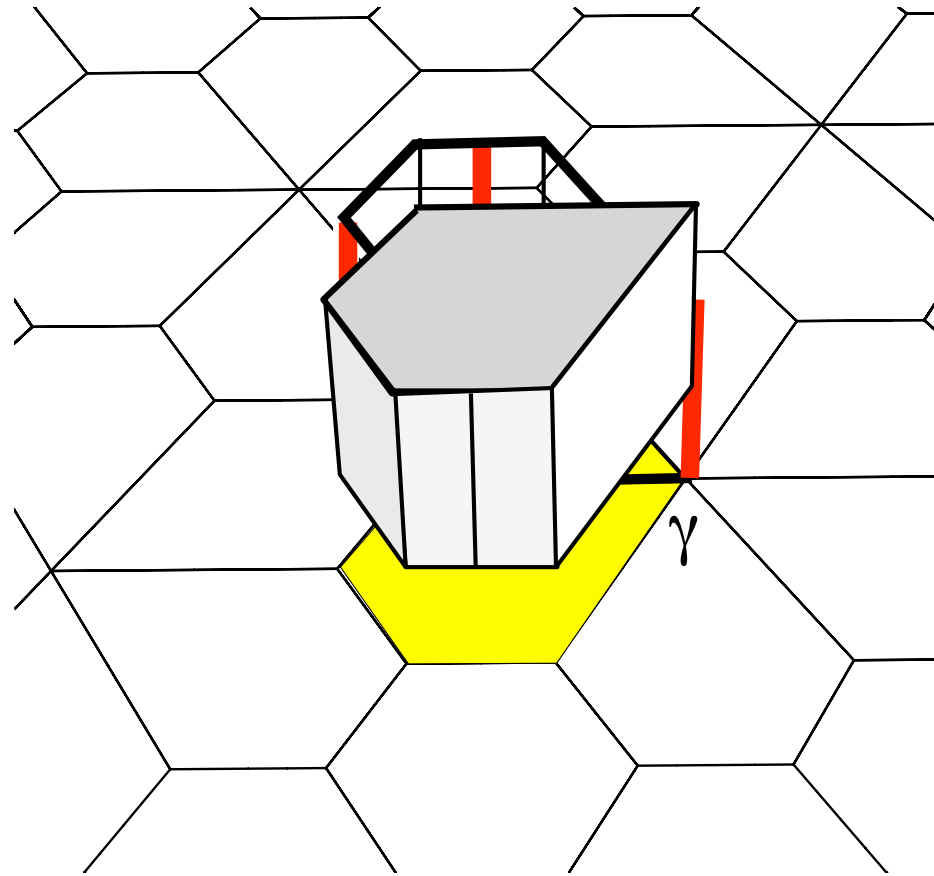


Beispiel: 632



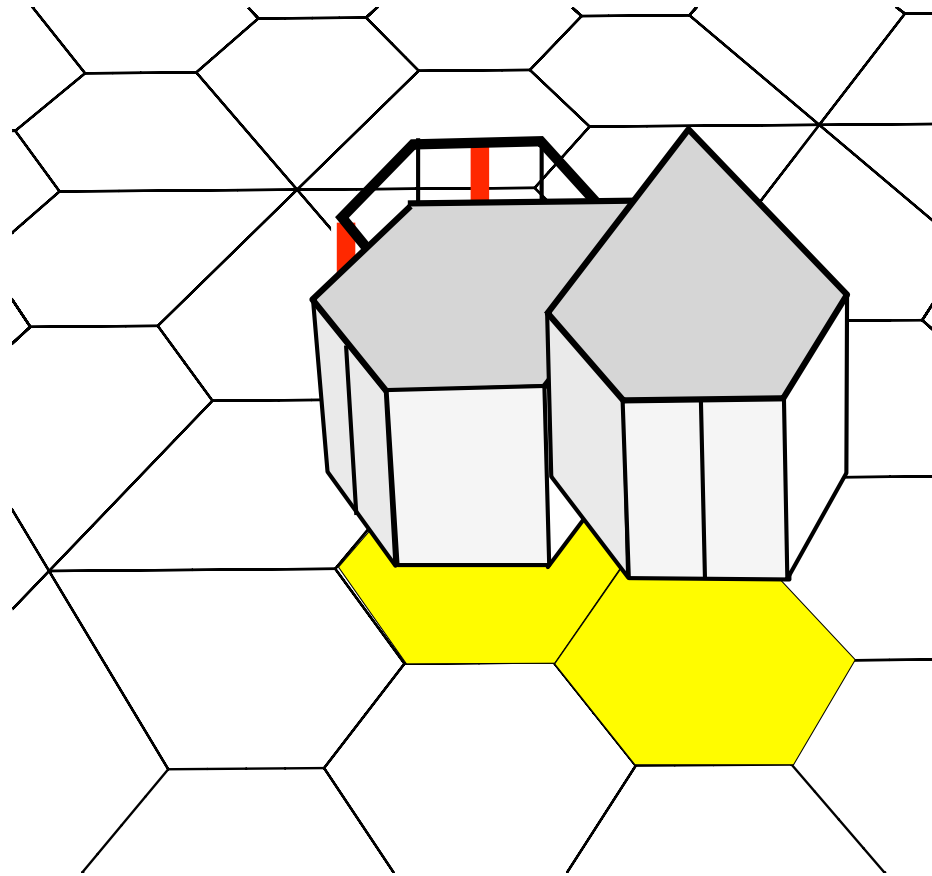
$$\gamma \rightarrow \frac{1}{2} +$$

Beispiel: 632



$$\gamma \rightarrow \frac{1}{2} +$$

Beispiel: 632



$$\gamma \rightarrow \frac{1}{2} +$$

Koppelungen für 632

- Relationen $\gamma^6 \delta^3 \epsilon^2$: $1 = \gamma^6 = \delta^3 = \epsilon^2 = \gamma\delta\epsilon$ (modulo K)
- Bestimme vertikale Kopplungen: $\gamma \rightarrow c_{\pm}$, $\delta \rightarrow d_{\pm}$ und $\epsilon \rightarrow e_{\pm}$
- $\gamma\delta\epsilon = 1$: müssen nur d_{\pm} und e_{\pm} bestimmen

Im Kreis-Faser Fall:

- $\delta^3 = 1$: d_{\pm} ist $0+$, $\frac{1}{3}+$, oder $\frac{2}{3}+$ (unger. Ordnung: – nicht möglich)
- $\epsilon^2 = 1$: e_{\pm} ist $0+$, $\frac{1}{2}+$, oder $0-$ (bei – kann e auf 0 gesetzt werden)

Kopplungen für $\gamma_6^\delta 3^{\epsilon 2}$, Kreis-Faser Fall

9 Fälle ($\delta \in \{0+, \frac{1}{3}+, \frac{2}{3}+\}$, $\epsilon \in \{0+, \frac{1}{2}+, 0-\}$):

$$\begin{array}{ccc} \gamma & \delta & \epsilon \\ 0+ & 0+ & 0+ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \gamma & \delta & \epsilon \\ \frac{2}{3}+ & \frac{1}{3}+ & 0+ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \gamma & \delta & \epsilon \\ \frac{1}{3}+ & \frac{2}{3}+ & 0+ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}+ & 0+ & \frac{1}{2}+ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{6}+ & \frac{1}{3}+ & \frac{1}{2}+ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{5}{6}+ & \frac{2}{3}+ & \frac{1}{2}+ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0- & 0+ & 0- \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{3}- & \frac{1}{3}+ & 0- \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{2}{3}- & \frac{2}{3}+ & 0- \end{array}$$

Kopplungen für $\gamma 6^\delta 3^\epsilon 2$, Kreis-Faser Fall

9 Fälle ($\delta \in \{0+, \frac{1}{3}+, \frac{2}{3}+\}$, $\epsilon \in \{0+, \frac{1}{2}+, 0-\}$):

$$\begin{array}{ccc} \gamma & \delta & \epsilon \\ 0+ & 0+ & 0+ \\ \frac{2}{3}+ & \frac{1}{3}+ & 0+ \\ \frac{1}{3}+ & \frac{2}{3}+ & 0+ \end{array} \cong \begin{array}{ccc} \gamma & \delta & \epsilon \\ \frac{2}{3}+ & \frac{1}{3}+ & 0+ \\ \frac{1}{3}+ & \frac{2}{3}+ & 0+ \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} \gamma & \delta & \epsilon \\ \frac{1}{2}+ & 0+ & \frac{1}{2}+ \\ \frac{1}{6}+ & \frac{1}{3}+ & \frac{1}{2}+ \\ \frac{5}{6}+ & \frac{2}{3}+ & \frac{1}{2}+ \end{array} \cong \begin{array}{ccc} \gamma & \delta & \epsilon \\ \frac{1}{2}+ & 0+ & \frac{1}{2}+ \\ \frac{1}{6}+ & \frac{1}{3}+ & \frac{1}{2}+ \\ \frac{5}{6}+ & \frac{2}{3}+ & \frac{1}{2}+ \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} \gamma & \delta & \epsilon \\ 0- & 0+ & 0- \\ \frac{1}{3}- & \frac{1}{3}+ & 0- \\ \frac{2}{3}- & \frac{2}{3}+ & 0- \end{array} \cong \begin{array}{ccc} \gamma & \delta & \epsilon \\ 0- & 0+ & 0- \\ \frac{1}{3}- & \frac{1}{3}+ & 0- \\ \frac{2}{3}- & \frac{2}{3}+ & 0- \end{array}$$

Achtung Symmetrie! Umkehrung des Vorzeichen von z reduziert auf sechs Fälle, alle verschieden

Kopplungen für $\gamma 6^\delta 3^\epsilon 2$, Interval-Faser Fall

- Einzige mögliche Kopplungen: $0+$ und $\frac{1}{2}+$ (da $K = \{n\pm\}$)

- $\delta^3 = 1$: $d_\pm = 0+$

- 2 Fälle:

γ	δ	ϵ	γ	δ	ϵ
$0+$	$0+$	$0+$	$\frac{1}{2}+$	$0+$	$\frac{1}{2}+$

Die Fibrifold Notation

- **Problem:** verschiedene Kopplungen können zur selben Faserung führen, z.B. durch eine Isotopie oder (versteckte) Symmetrie
- Wir brauchen eine Notation, die **nicht** durch die Kopplungen selbst, sondern durch Merkmale des gefaserten Orbifolds spezifiziert wird (bis auf Isotopie)
- Die **Fibrifold Notation** reduziert das Problem, da sie auf Merkmale der Faserung (bis auf Isotopie) gründet.

Alle Faserungen über 632

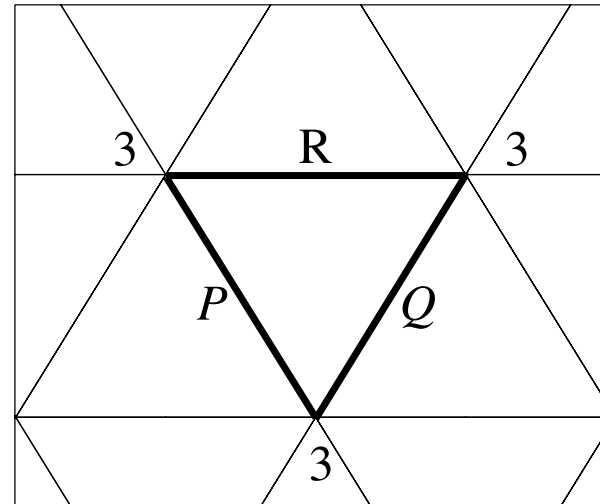
Kreis-Faser Fall: Kopplungen			Fibrifold Name			
γ	δ	ϵ				
$0+$	$0+$	$0+$			$(6_0 3_0 2_0)$	
$\frac{1}{2}+$	$0+$	$\frac{1}{2}+$			$(6_3 3_0 2_1)$	
$0-$	$0+$	$0-$			$(6 3_0 2)$	
$\frac{2}{3}+$	$\frac{1}{3}+$	$0+$	\mathbb{R}	$\frac{1}{3}+$	$\frac{2}{3}+$	$(6_2 3_2 2_0)$
$\frac{1}{6}+$	$\frac{1}{3}+$	$\frac{1}{2}+$	\mathbb{R}	$\frac{5}{6}+$	$\frac{2}{3}+$	$(6_1 3_1 2_1)$
$\frac{1}{3}-$	$\frac{1}{3}+$	$0-$	\mathbb{R}	$\frac{2}{3}-$	$\frac{2}{3}+$	$(6 3_1 2)$

Interval-Faser Fall: Kopplungen			Fibrifold Name
γ	δ	ϵ	
$0+$	$0+$	$0+$	$[6_0 3_0 2_0]$
$\frac{1}{2}+$	$0+$	$\frac{1}{2}+$	$[6_3 3_0 2_1]$

- Falls $\frac{a}{A}+$, ergänze A zu A_a (Rotationszahl)
- Falls $c-$, ergänze A nicht (Höhe der Spiegelebene kein Merkmal)

Alle Faserungen über $*^P 3^Q 3^R 3$

Kopplungen			Fibrifold
P	Q	R	Name
$0+$	$0+$	$0+$	$(\cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)$
$\frac{1}{2}+$	$\frac{1}{2}+$	$\frac{1}{2}+$	$(\cdot : 3 : 3 : 3)$
$0-$	$0-$	$0-$	$(\cdot 3_0 3_0 3_0)$
$\frac{2}{3}-$	$\frac{1}{3}-$	$0-$	$(\cdot 3_1 3_1 3_1)$
$\frac{1}{3}-$	$\frac{1}{3}-$	$0-$	$(\cdot 3_0 3_1 3_2)$
$0+$	$0+$	$0+$	$[\cdot 3 \cdot 3 \cdot 3]$
$\frac{1}{2}+$	$\frac{1}{2}+$	$\frac{1}{2}+$	$[\cdot : 3 : 3 : 3]$



- Ein typisches Q hat Ordnung 2, also koppelt Q mit $0+$, $\frac{1}{2}+$ oder $q-$
- Ist $Q \rightarrow 0+$ oder $Q \rightarrow \frac{1}{2}+$, schreibe $A \cdot B$ oder $A : B$
- Ist $P \rightarrow p-$ & $Q \rightarrow q+$, ergänze A nicht
- Ist $P \rightarrow p-$ & $Q \rightarrow q-$, dann $PQ \rightarrow (p - q)+$, $p - q = \frac{a}{A}$; ergänze A zu A_a
(Weitere Ergänzungen nötig in komplizierten Fälle: $\bar{*}$ oder $*_i$)

Tabelle 1: Klassifikation der gefaserten Gruppen

Ebenengruppe: $22 \times$ Relationen $\gamma^2 \delta^2 Z^2 : 1 = \gamma^2 = \delta^2 = \gamma \delta Z^2$			
Fibrifold Name	Kopplungen für γ δ Z I	Punktgruppe	IT Num.
$[2_0 2_0 \times_0]$	$0+ 0+ 0+ 0-$	$*222$	55
$[2_0 2_0 \times_1]$	$0+ 0+ \frac{1}{2}+ 0-$	$*222$	58
$[2_1 2_1 \times]$	$\frac{1}{2}+ \frac{1}{2}+ 0+ 0-$	$*222$	62
$(2_0 2_0 \times_0)$	$0+ 0+ 0+$	$*22$	32
$(2_0 2_0 \times_1)$	$0+ 0+ \frac{1}{2}+$	$*22$	34
$(2_0 2_1 \times)$	$0+ \frac{1}{2}+ \frac{1}{4}+$	$*22$	43
$(2_1 2_1 \times)$	$\frac{1}{2}+ \frac{1}{2}+ 0+$	$*22$	33
$(2_0 2_0 \bar{\times})$	$0+ 0+ 0-$	222	18
$(2_1 2_1 \bar{\times})$	$\frac{1}{2}+ \frac{1}{2}+ 0-$	222	19
$(2 2 \times)$	$0- 0- 0+$	2^*	14

Das Alias Problem

- **Alias Problem:** Jede reduzierbare Raumgruppe besitzt bis zu drei verschiedenen Faserungen
- Die Invarianten von Delgado & H. unterteilen die gefaserten Gruppen in 184 verschiedenen Klassen mit je bis zu drei Elementen
- Eine zusätzliche Beobachtung beweist, daß jede Klasse nur aus Namen für eine Gruppe besteht.

Tabelle 2: Klassifikation der Raumgruppen

Primärname	Internationale Bezeichnung	Sekundärnamen
Punktgruppe *22, nos. 25-46		
($* \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$)	25. <i>Pmm2</i>	$[*0 \cdot *0 \cdot]$
($* \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 : 2$)	38. <i>Amm2</i>	$[*1 \cdot *1 \cdot]$, $[* \cdot \times 0]$
($* \cdot 2 \cdot 2 : 2 : 2$)	42. <i>Fmm2</i>	$[*1 \cdot *1 :]$
($* \cdot 2 : 2 \cdot 2 : 2$)	26. <i>Pmc2₁</i>	$(\bar{*} \cdot \bar{*} \cdot)$, $[\times 0 \times 0]$
($* \cdot 2 : 2 : 2 : 2$)	39. <i>Abm2</i>	$[*1 : *1 :]$, $(\bar{*} \cdot \bar{*} 0)$
($* : 2 : 2 : 2 : 2$)	27. <i>Pcc2</i>	$(\bar{*} 0 \bar{*} 0)$
($2_0 * \cdot 2 \cdot 2$)	35. <i>Cmm2</i>	$[*0 \cdot *0 :]$
($2_0 * \cdot 2 : 2$)	46. <i>Ima2</i>	$(\bar{*} \cdot \bar{*} 1)$, $[* : \times 0]$
($2_0 * : 2 : 2$)	37. <i>Ccc2</i>	$(\bar{*} 0 \bar{*} 1)$
($2_1 * \cdot 2 \cdot 2$)	44. <i>Imm2</i>	$[* \cdot \times 1]$
($2_1 * \cdot 2 : 2$)	36. <i>Cmc2₁</i>	$(\bar{*} \cdot \bar{*} :)$, $[\times 1 \times 1]$
($2_1 * : 2 : 2$)	45. <i>Iba2</i>	$(\bar{*} : \bar{*} 0)$

Primär- name	Internationale Bezeichnung	Sekundär- namen
-----------------	-------------------------------	--------------------

Literatur

W.P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, Princeton University Press, 1980.

J.H. Conway: *The Orbifold Notation for Surface Groups*, Lond. Math. Soc. LNS 165, 438-447:1992.

O. Delgado and D.H. Huson: *Orbifold Triangulations and Crystallographic Groups*, Per. Math. Hung., **34**(1-2), 29–55:1997.

J.H. Conway and D.H. Huson: *The orbifold notation for two-dimensional groups*. Manuscript 1999.

J.H. Conway, O. Delgado, D.H. Huson & W.P. Thurston, <i>On three-dimensional space groups</i> . Manuscript 1999.
